Manipulating Joint Distributions

Obtaining Marginal Density from Joint Density (continuous case)

$$f_W(w) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{W,X,Y,Z}(w,x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

$$f_{W,Y}(w,y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f_{W,X,Y,Z}(w,x,y,z)\,dx\,dz$$

$$f_{X,Y,Z}(x,y,z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{W,X,Y,Z}(w,x,y,z)\,dw$$

Conditional Densities

$$f_{W|X,Y,Z}(w|x,y,z) = \frac{f_{W,X,Y,Z}(w,x,y,z)}{f_{X,Y,Z}(x,y,z)}$$

$$f_{X,Z|W,Y}(x,z|w,y) = \frac{f_{W,X,Y,Z}(w,x,y,z)}{f_{W,Y}(w,y)}$$

$$f_{X,Y,Z|W}(x,y,z|w) = \frac{f_{W,X,Y,Z}(w,x,y,z)}{f_W(w)}$$

Joint density as Product

$$\begin{aligned} & f_{W,X,Y,Z}(w,x,y,z) \\ = \quad & f_W(w) f_{X|W}(x|w) f_{Y|W,X}(y|w,x) f_{Z|W,X,Y}(z|w,x,y) \end{aligned}$$

Introduction

$X_0, X_1, X_2, \ldots$

is a random process

(sequence of rv's defined on the same probability space).

Think of system evolving randomly over time:

X_i = state of system at time i.

$X_i \in S \ \forall i$ (the state space).

For now assume S is discrete, and finite or countable.

Say $S = \{1, 2, \ldots, m\}$

or $S = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

A *Markov Process* satisfies

(1) $P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n, \ldots, X_0 = i_0)$

$= P(X_{n+1} = i_{n+1} | X_n = i_n)$

for all $n \geq 0$

and all possible $i_0, i_1, \ldots, i_{n+1} \in S$

(for which the conditioning event has probability > 0).

A Markov Process which has *stationary transition probabilities* (is *time homogeneous*) satisfies

(2) $P(X_{n+1} = j | X_n = i) = P(X_1 = j | X_0 = i)$

for all $n \geq 0$, $i, j \in S$.

A Markov Chain satisfies both (1) and (2):

$$P(X_{n+1}=j \mid X_n=i, X_{n-1}=i_{n-1}, \dots, X_0=i_0)$$
$$= P(X_1=j \mid X_0=i) \equiv p_{ij}$$

for all ... (for which the conditioning event has prob >0).

A Markov chain is described by its

transition prob. matrix $P=(p_{ij})$, and

initial distribution $a=(a_i)$

where $a_i \equiv P(X_0=i)$ for all $i \in S$.

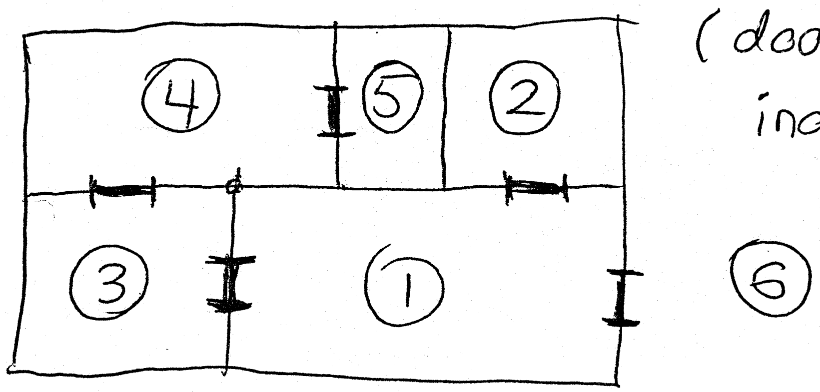
If S is infinite, these are infinite-dimensional.

Clearly $p_{ij} \geq 0$, $a_i \geq 0$,

$$\sum_{j \in S} p_{ij} = 1 \;\; \forall i \in S, \quad \sum_{i \in S} a_i = 1.$$

Example

Sleepwalker in house:



(doors indicated)

Starts in room 4 ($X_0 = 4$)

At each time $t = 1, 2, 3, \ldots$

moves according to rule:

with prob 1/2 stay in same room;
otherwise choose from available doors at random (equally likely) and go through.

Door to outside swings shut and locks.

Position (location) of sleepwalker forms a Markov chain $X_0, X_1, X_2, \ldots$

with state space $S = \{1, 2, \ldots, 6\}$.

Initial distribution is

$$a = (a_1, \ldots, a_6) = (0, 0, 0, 1, 0, 0).$$

Transition prob. matrix is

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & 1/6 & 0 & 0 & 1/6 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/2 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Modified Sleepwalker Chain:

Eliminate state 6 (bolt the door).

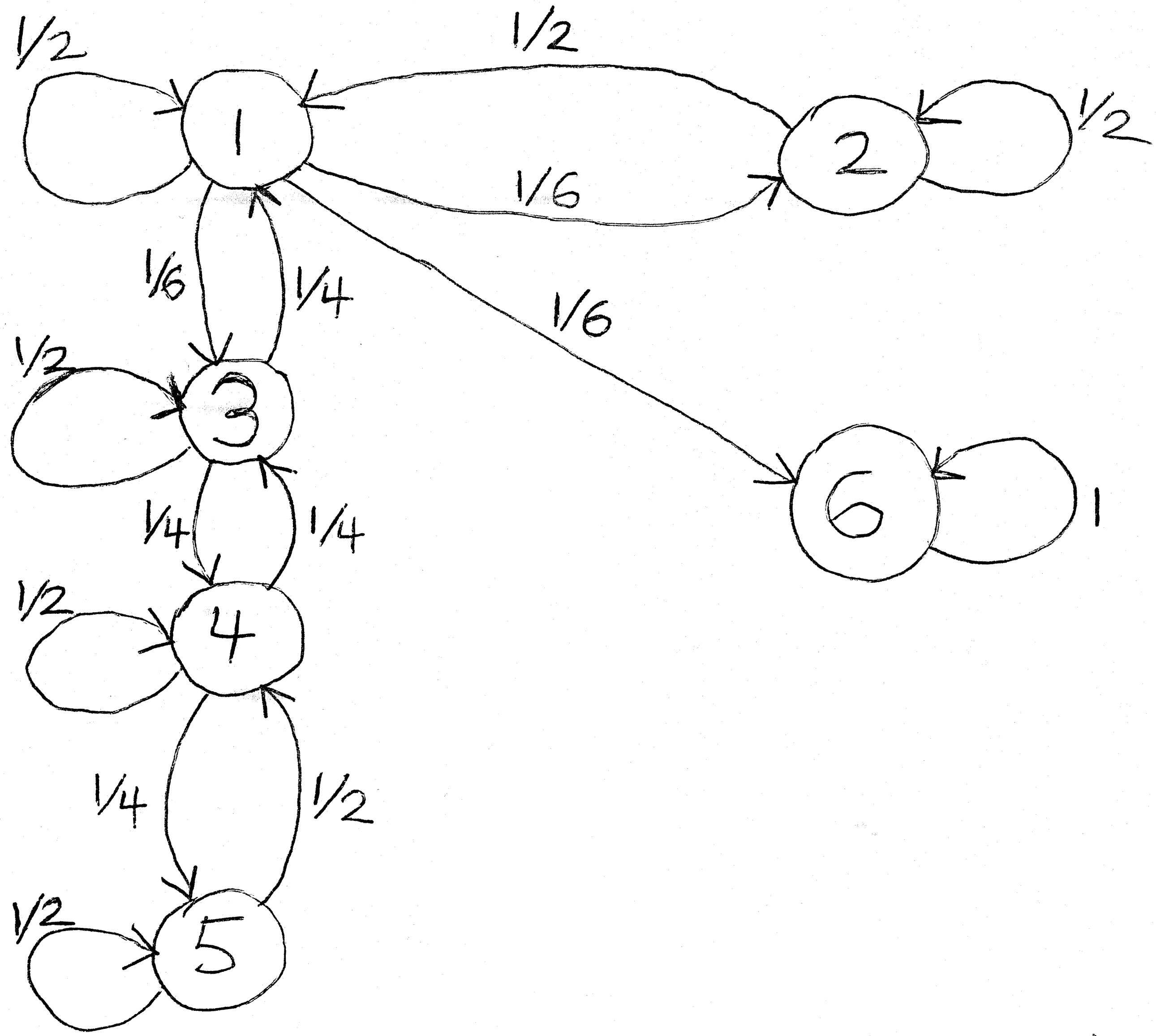
This chain has 5 states (rooms) and transition prob. matrix obtained by deleting the last row and column above, and changing the first row to read $(\frac{1}{2} \ \frac{1}{4} \ \frac{1}{4} \ 0 \ 0)$.

Picturing a transition matrix

Draw a node for each state $i \in S$.

Draw an arrow connecting i and j if $p_{ij} > 0$.

Label arrow with value of p_{ij}.



Fifty Realizations of Sleepwalker Chain, Starting in Room 4

```
44445433433331134555545544444333455543444333333455434433334431211
43331111112166666666666666666666666666666666666666666666666666666
45444545544554433112221116666666666666666666666666666666666666666
44554555543444444543333431116666666666666666666666666666666666666
45544554444544333333331312112136666666666666666666666666666666666
43434434443116666666666666666666666666666666666666666666666666666
44443116666666666666666666666666666666666666666666666666666666666
44433433166666666666666666666666666666666666666666666666666666666
44344445554455555544331222212221121122221216666666666666666666666
44313444543454445555554445545444333333333443333312116666666666666
44313433444331333166666666666666666666666666666666666666666666666
44544311221111666666666666666666666666666666666666666666666666666
45555554443444444454543111113313334444444331666666666666666666666
43121666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666
43111111111666666666666666666666666666666666666666666666666666666
44443331111166666666666666666666666666666666666666666666666666666
44554444555554543111334331133316666666666666666666666666666666666
43454455444455543111166666666666666666666666666666666666666666666
43112112122116666666666666666666666666666666666666666666666666666
44431666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666
44334444433433331131311211221666666666666666666666666666666666666
44555554444545444344554431113166666666666666666666666666666666666
44454433445431666666666666666666666666666666666666666666666666666
43111666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666
43166666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666
43311666666666666666666666666666666666666666666666666666666666666
45555555554555544343116666666666666666666666666666666666666666666
44444455445454334543166666666666666666666666666666666666666666666
43311166666666666666666666666666666666666666666666666666666666666
45455543445554445555555443116666666666666666666666666666666666666
43121111111666666666666666666666666666666666666666666666666666666
44343312111113333344555555555444454543333316666666666666666666666
44444444544555454544443434334445444454554344455455554555444554554
44455433333316666666666666666666666666666666666666666666666666666
44554445433312111666666666666666666666666666666666666666666666666
44443316666666666666666666666666666666666666666666666666666666666
44431333455544455443444554544454454343111222216666666666666666666
45444311121122211133133333112216666666666666666666666666666666666
44445434443116666666666666666666666666666666666666666666666666666
44333311111166666666666666666666666666666666666666666666666666666
45454444333122213311333134445555433455543444312216666666666666666
43313333334331166666666666666666666666666666666666666666666666666
44545444334433316666666666666666666666666666666666666666666666666
44444444445444434316666666666666666666666666666666666666666666666
45444445554433311221666666666666666666666666666666666666666666666
44455443331333331333443166666666666666666666666666666666666666666
43433122111166666666666666666666666666666666666666666666666666666
45445543133431212116666666666666666666666666666666666666666666666
43331166666666666666666666666666666666666666666666666666666666666
43111133444544443334333345554544455443444345544311666666666666666
```

Fifty Realizations of Modified Sleepwalker Chain, Starting in Room 4

```
443113333454554454343445544444545554455544433331212221134543131111
455454333111331111134333131112112131133111133345454544444444544555
4444554545444444545444455554445444543331133334554431212221133121
44434433122221121134555444454554444444433312222221133343311312113
44545454444445454313344554433133112113133343431331113331133111111
44554313111312221122211334545554443311343455431121134433454333345
45554333333433311121221222111113111121133112111112221211122113333
44345454544554444444434554334554444433333313454455444444544543343
44334433334544331134545454454544444555555544454543454443334331134
43343333121333454544433333434444554333333331131221221334444443311222
45443333443344554544431111113111131111212134331133313443122111134
44433334443331312222112213131133445555443454333133331213121122131
4445555545554455444431133345544333334445454312112111333334443312
443433134445455455433331311112221121112222113345555545554343311111
45545544334331111333311222112111221343333333344454455554334454445
44443334431134444345431213313331344433454433331221133444444433444
44311211131211344334433333345454345555554455443133444444445544454
44555544444555555554333455443433344433312211134545431345555433112
44454555443131134311222213434444434331312111333345543313444444333
454555455554443455454454433312113333133343311131311222133313111111
44434433331122122111221213134433134431131313333445544554312121112
4344445555555443311122213334345544444444555544544445444445445543122
4554554555545444454544543131311333331213343111111131122222222121334
4544443344344344555544545543334555543444445443113455544444455431345
43311112213312221111213444444334444331121121131211333333334334454454
44554433331222131133343343333443121333313445545431311112221222133
445454444334554445544433443434444444331133311111121333344454333133
445543333112113455544445455444433433333331344334444545444333311121
434443333333122121134554544555444444544444445544454555555455543331
4554333455543111113133333311121334445443455555433113131134444545455
4311222121111121333455554444554443444331334344444433344544555444444
44554345554331221131221212121213311334343445544334455445454444443
45455434555445455554444333111331222211113333454454343111331121333
45544443112221222122122211222222134443333311111311333334333134434
45433431111131211311345555544331121121111331111331222221331121112
455554444545444443444443455555454443333331211133445455444445555555
445433111333331221113122213334334444544454444444333112211222111344
4333311121111221111112211311111121331334555445455454433121122111
443313345455444334555544333121122211213444444444433121131222222113
4312134454544344431134433333121113454454444444444544454544333133333
444455544313444554444311133333334312211113455445544543455443333333
431113313313121213331213345444344545443333334443344443343313121211
443331111111112221343444331134443333343334344445454554454343133311
444434443455443121111134545544454313333444344344433112134431111122
44445445555444444311331221333343131131334455544333111122131222112
44433331213445443133443333313121111311343344333111134555543131222
43333333333111112222131111333343443431211113454443334333455543333
44545555443133333312211111344543431131213443333444433444433344443
45434433331122131211213333433313133443122213333344313311312113345
44331134445554545554331344554433313311112122213313333334455554545
```

Comments

For *finite* state Markov chains, many properties are intuitively obvious.

For the original sleepwalker chain:

- You will eventually exit the house (enter the absorbing state).
- All rooms (inside) will be visited only finitely many times (perhaps zero times). (†)

For the modified sleepwalker chain (bolting the door to the outside):

- Starting from any room, you are guaranteed to (eventually) return.
- All rooms will be visited infinitely often.

For *infinite* state Markov chains, things are not so clear.

For a house with *infinitely* many rooms, all of the earlier statements could be false!

(statement (†) is still true, but this is a subtle point.)

$$P(X_0 = i, X_1 = j, X_2 = k, X_3 = l)$$

$$= a_i \, p_{ij} \, p_{jk} \, p_{kl}$$

In general,

$$P(X_0 = i_0, X_1 = i_1, \ldots, X_n = i_n)$$

$$= a_{i_0} \, p_{i_0 i_1} \, p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

This is essentially a consequence of

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \, P(B \mid A) \, P(C \mid A \cap B) \, P(D \mid A \cap B \cap C)$$

or of

$$f_{W,X,Y,Z}(w,x,y,z) = f_W(w) \, f_{X \mid W}(x \mid w) \, f_{Y \mid W,X}(y \mid w,x) \, f_{Z \mid W,X,Y}(z \mid w,x,y)$$

Fact:

$$P(X_1=i_1,\ldots,X_n=i_n \mid X_0=i_0) \qquad (*)$$

$$= p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

if $P(X_0=i_0)>0$.

Notation:

$P_i(\cdot)$ = probability measure of MC started from state i, that is, with initial distribution

$a = \delta_i = (\delta_{ij} : j \in S)$

where $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{if } j=i \\ 0 & \text{if } j \neq i. \end{cases}$

Fact restated:

$$P_{i_0}(X_1=i_1,\ldots,X_n=i_n) = p_{i_0 i_1} p_{i_1 i_2} \cdots p_{i_{n-1} i_n}$$

Proof: $(*) = P(X_0=i_0,\ldots,X_n=i_n)/P(X_0=i_0)$

$$= a_{i_0} p_{i_0 i_1} \cdots p_{i_{n-1} i_n} / a_{i_0} \qquad \text{QED}$$

Higher Order Transition Probabilities

Notation: $P^n = (p_{ij}^{(n)} : i \in S, j \in S)$.

Facts: (about MC with t.p.m. P)

$$P(X_n = k) = \sum_{j \in S} a_j p_{jk}^{(n)} = (aP^n)_k . \quad (1)$$

(aP^n gives the distn. of X_n.)

$$P_i(X_n = k) = p_{ik}^{(n)} . \quad (2)$$

(P^n gives the n-step transition probabilities.)

$$P_{i_0}(X_{t_1} = i_1, \ldots, X_{t_n} = i_n) \quad (0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n)$$

$$= p_{i_0 i_1}^{(t_1)} p_{i_1 i_2}^{(t_2 - t_1)} \cdots p_{i_{n-1} i_n}^{(t_n - t_{n-1})} . \quad (3)$$

Note: P^k is a "stochastic" matrix (for $k \geq 1$)

↳ (nonnegative elements, rows sum to 1.)

and $X_0, X_k, X_{2k}, X_{3k}, \ldots$ is a MC with t.p.m. P^k.

$P(X_n = k) = (aP^n)_k$. Why?

Follows from "Law of Total Probability" and induction.

$$P(X_{n+1} = k) = \sum_{j \in S} P(X_{n+1} = k \mid X_n = j) P(X_n = j)$$

$$= \sum_{j \in S} P(X_n = j) \, p_{jk}$$

But this exactly says

$$\pi^{n+1} = \pi^n P$$

where π^{n+1}, π^n are row vectors with entries:

$$\pi^n_k = P(X_n = k), \quad \pi^{n+1}_k = P(X_{n+1} = k).$$

Using this, starting from $\pi^0 = a$, gives

$$\pi^1 = aP$$

$$\pi^2 = (aP)P = aP^2$$

$$\pi^3 = (aP^2)P = aP^3$$

etc.

The Sleepwalker Transition Probability Matrix

```
P1
     [,1]    [,2]    [,3] [,4] [,5]    [,6]
[1,] 0.50 0.16667 0.16667 0.00 0.00 0.16667
[2,] 0.50 0.50000 0.00000 0.00 0.00 0.00000
[3,] 0.25 0.00000 0.50000 0.25 0.00 0.00000
[4,] 0.00 0.00000 0.25000 0.50 0.25 0.00000
[5,] 0.00 0.00000 0.00000 0.50 0.50 0.00000
[6,] 0.00 0.00000 0.00000 0.00 0.00 1.00000
```

P

$$P_{ij} = p_{ij}^{(1)} = P_i(X_1 = j)$$

```
P2 <- P1 %*% P1
P2

       [,1]     [,2]     [,3]     [,4]   [,5]     [,6]
[1,] 0.3750 0.166667 0.166667 0.041667 0.0000 0.250000
[2,] 0.5000 0.333333 0.083333 0.000000 0.0000 0.083333
[3,] 0.2500 0.041667 0.354167 0.250000 0.0625 0.041667
[4,] 0.0625 0.000000 0.250000 0.437500 0.2500 0.000000
[5,] 0.0000 0.000000 0.125000 0.500000 0.3750 0.000000
[6,] 0.0000 0.000000 0.000000 0.000000 0.0000 1.000000
```

P^2

$$(P^2)_{ij} = p_{ij}^{(2)} = P_i(X_2 = j)$$

```
P4 <- P2 %*% P2
P4
        [,1]      [,2]    [,3]     [,4]      [,5]      [,6]
[1,] 0.26823 0.1250000 0.14583 0.075521 0.0208333 0.3645833
[2,] 0.37500 0.1979167 0.14062 0.041667 0.0052083 0.2395833
[3,] 0.21875 0.0703125 0.24089 0.239583 0.1080729 0.1223958
[4,] 0.11328 0.0208333 0.23958 0.381510 0.2187500 0.0260417
[5,] 0.06250 0.0052083 0.21615 0.437500 0.2734375 0.0052083
[6,] 0.00000 0.0000000 0.00000 0.000000 0.0000000 1.0000000
```

P^4

$$(P^4)_{ij} = p_{ij}^{(4)} = P_i(X_4 = j)$$

P32

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]
[1,]	0.038470	0.013874	0.043501	0.055191	0.029626	0.81934
[2,]	0.041623	0.015055	0.046831	0.059252	0.031776	0.80546
[3,]	0.065251	0.023415	0.074426	0.094877	0.051011	0.69102
[4,]	0.082787	0.029626	0.094877	0.121257	0.065251	0.60620
[5,]	0.088878	0.031776	0.102022	0.130502	0.070246	0.57658
[6,]	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	1.00000

P^{32}

$$(P^{32})_{ij} = p_{ij}^{(32)} = P_i(X_{32} = j)$$

> P128

	[,1]	[,2]	[,3]	[,4]	[,5]	[,6]
[1,]	0.0012253	0.00043931	0.0013997	0.0017858	0.00096039	0.99419
[2,]	0.0013179	0.00047252	0.0015055	0.0019208	0.00103300	0.99375
[3,]	0.0020996	0.00075276	0.0023984	0.0030599	0.00164565	0.99004
[4,]	0.0026787	0.00096039	0.0030599	0.0039039	0.00209955	0.98730
[5,]	0.0028812	0.00103300	0.0032913	0.0041991	0.00225829	0.98634
[6,]	0.0000000	0.00000000	0.0000000	0.0000000	0.00000000	1.00000

P^{128}

$$(P^{128})_{ij} = p_{ij}^{(128)} = P_i(X_{128} = j)$$

$$P_4(X_1=5, X_2=5, X_3=4, X_4=3) =$$

```
P1[4,5]*P1[5,5]*P1[5,4]*P1[4,3]
```

$$= p_{45}\, p_{55}\, p_{54}\, p_{43}$$

0.015625

```
P4[4,3]
```

$$P_4(X_4=3) = p_{43}^{(4)}$$

0.23958

```
P1[5,4]*P1[4,3]*P1[3,1]*P1[1,6]
```

$$P_5(X_1=4, X_2=3, X_3=1, X_4=6)$$

0.0052083

```
P4[5,6]
```

$$P_5(X_4=6)$$

0.0052083

```
P4[5,3]*P4[3,2]*P2[2,1]*P1[1,3]
```

$$= p_{53}^{(4)}\, p_{32}^{(4)}\, p_{21}^{(2)}\, p_{13}^{(1)}$$

0.0012665

$$= P_5(X_4=3, X_8=2, X_{10}=1, X_{11}=3)$$

Communication

Let i and j be states.

Definition:

$i \to j$ means $p_{ij}^{(n)} > 0$ for some $n \geq 0$.

$i \to j$ is read as "j is accessible from i".

Note: $P^0 = I$ and $p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{if } i = j \\ 0 & \text{if } i \neq j \end{cases}$.

Since $n = 0$ is allowed in the definition of "$\to$" and $p_{ii}^{(0)} = 1 > 0$, it is always true that $i \to i$.

However, $i \to i$ does **not** imply that, starting from i, it is possible to return to i at a later time.

Definition:

$i \leftrightarrow j$ means $i \to j$ and $j \to i$.

$i \leftrightarrow j$ is read as "i and j communicate".

Communication is an equivalence relation:

- $i \leftrightarrow i$ (reflexive).
- If $i \leftrightarrow j$, then $j \leftrightarrow i$. (symmetric)
- If $i \leftrightarrow j$ and $j \leftrightarrow k$, then $i \leftrightarrow k$. (transitive)

Therefore, the state space S is divided (partitioned) into disjoint equivalence classes:

$$S = \bigcup_{\alpha} C_{\alpha}$$

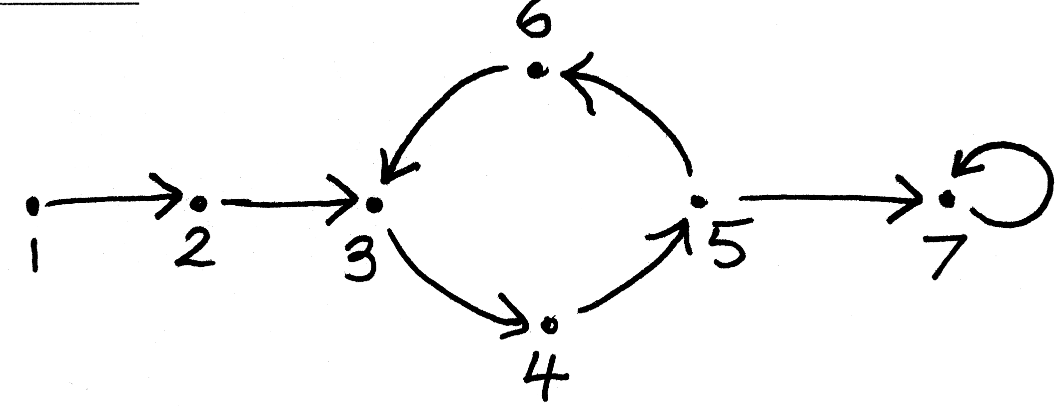
where $i \leftrightarrow j$ if and only if i and j belong to the same class C_{α}.

The states in a class C_α communicate with each other, but **not** with any states outside C_α.

The classes C_α are called the *communication* classes.

If the state space S consists of a single communication class (that is, all states communicate), then the Markov chain is said to be **irreducible**.

Example:



Arrows indicate positive transition probabilities.

The communication classes are:

$\{1\}, \{2\}, \{3,4,5,6\}, \{7\}$

Period

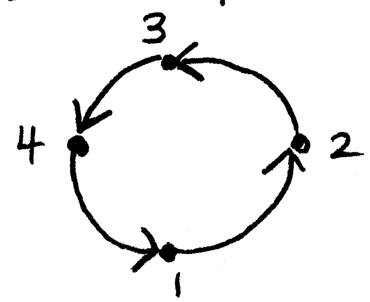
For $i \in S$,

$$d(i) = \gcd \underbrace{\{n : p_{ii}^{(n)} > 0\}}_{\text{The set of possible return times}}.$$

period of i greatest common divisor

If $d(i) = 1$, we say i is <u>aperiodic</u>.

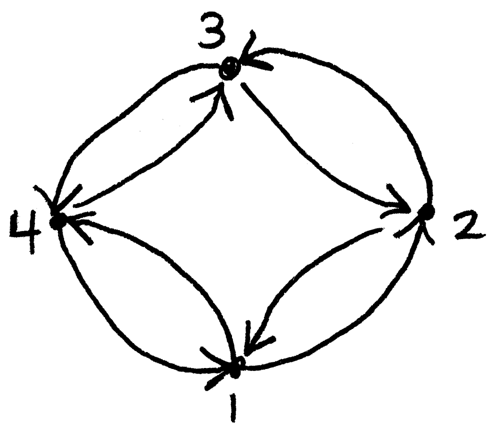
Examples



$d(i) = 4 \quad \forall i$.

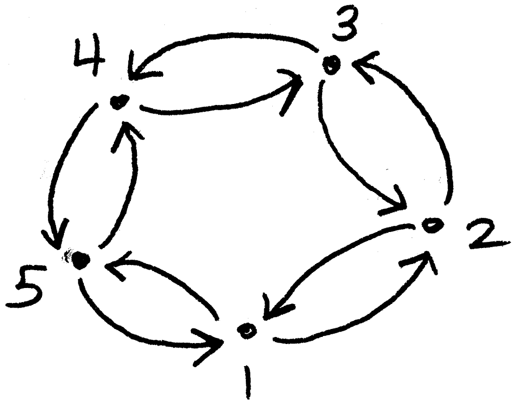
$p_{ii}^{(4n)} = 1$ for all i and n.

$\{n : p_{ii}^{(n)} > 0\} = \{0, 4, 8, \ldots\}$



$d(i) = 2 \quad \forall i$

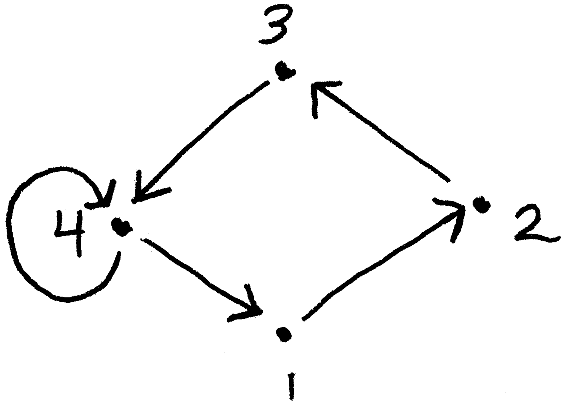
$\{n : p_{ii}^{(n)} > 0\} = \{0, 2, 4, \ldots\}$



$d(i) = 1 \quad \forall i$

$\{n : p_{ii}^{(n)} > 0\}$

$= \{0, 2, 4, 5, 6, 7, \dots\}$

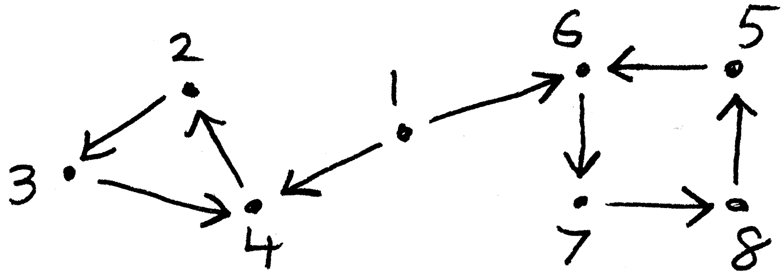


$d(i) = 1 \quad \forall i$

$\{n : p_{44}^{(n)} > 0\}$

$= \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

$\{n : p_{11}^{(n)} > 0\} = \{0, 4, 5, 6, \dots\}$



$d(1) = \infty$.

$d(i) = 3$ for $i \in \{2, 3, 4\}$.

$d(i) = 4$ for $i \in \{5, 6, 7, 8\}$.

Period is a <u>class property</u>:

If $i \leftrightarrow j$, then $d(i) = d(j)$.